Министерство образования, науки и молодежи
Республики Крым
Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение Республики Крым
«Романовский колледж индустрии гостеприимства»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ ЕН.01 «МАТЕМАТИКА»

По реализации программы подготовки специалистов среднего звена
по специальности СПО 43.02.07 Сервис по химической обработке изделий

г. Симферополь, 2024

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы учебной дисциплины ЕН.01 «МАТЕМАТИКА» специальности 43.02.07 Сервис по химической обработке изделий, входящей в укрупненную группу направлений специальностей 43.00.00 Сервис и туризм по программе подготовки специалистов среднего звена на базе среднего общего образования

г. Симферополь ГБПОУ РК «РКИГ»

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы учебной дисциплины составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине «МАТЕМАТИКА»
Обсуждено и рекомендовано к утверждению решением цикловой методической комиссии общегуманитарных, социально-экономических и естественно-научных дисциплин (ОГСЭ и ЕН)
Протокол №____ от «___» _________ 20__г.
Председатель ЦМК Ярцева В.В.

Разработчики:
преподаватель Т.И. Савчук

«___»______________ 20__г.

Утверждено
Заместитель директора УПР
________________ Е.Ш. Булаш
«___»____________20__г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА КАК ВАЖНЕЙШАЯ ФОРМА УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Самостоятельная работа - это планируемая учебная, учебноисследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа, особенно в рамках дисциплины «МАТЕМАТИКА», является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - «подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности».

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание исследовательских работ и т.д.

2. КУЛЬТУРА И ГИГИЕНА УМСТВЕННОГО ТРУДА

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность — это способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организацию рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величину умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н.Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется.

Наиболее плодотворным является *утреннее время (с 8 до 14 часов),* причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда. Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9-10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 - 4 часа дома). ***Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом***. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра* .

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и её производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр.

***Ритм в работе* —** это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и её ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы - это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, чтение и т.д.), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, её содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько

определенных моторных действий (построение графиков и т.п.).
Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.
Существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.
Кроме того, для поддержания работоспособности и общего хорошего состояния здоровья необходимо правильно организовать своё рабочее место (подобрать высоту стола и стула, наладить освещение, выделить место для рационального и, главное, систематического хранения книг и бумаг.

3. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИКА»

Общие положения

Самостоятельная работа студента направлена на достижение целей подготовки специалистов-профессионалов, активное включение обучаемых в сознательное освоение содержания образования, обеспечение мотивации, творческое овладение основными способами будущей профессиональной деятельности.
Конкретные виды самостоятельной работы (аудиторной и внеаудиторной) по каждой теме планируются преподавателем при разработке учебной программы. Наибольшее внимание уделяется творческим видам СРС.

Выписка из рабочей программы по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

Код ПК, ОК	Умения	Знания
ОК 01-09, ПК 4.4, 4.5.	применять математические методы при решении профессиональных задач	основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики

Самостоятельная работа обучающегося (всего) Составление и решение задач, в том числе практической направленности, Подготовка презентации	**22** 12 10

4. ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

4.1. СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ, В ТОМ ЧИСЛЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

Раздел 1. Линейная алгебра

Тема 1.1 Матрицы и определители

Выполнение основных действий с матрицами по алгоритму. Вычисление определителей матрицы .

Цели:

- закрепить умение вычисления определителей;
- получить навыки нахождения обратной матрицы;
- закрепить теоретические знания и практические умения по данной теме.

1. Краткие теоретические сведения.

Определения

Матрица элементов из некоторого пространства S размера $m \times n$ — это объект из пространства $S^{m \times n}$, координаты которого упорядочены по строкам и столбцам. Далее мы будем рассматривать вещественные матрицы, которые можно считать прямоугольными таблицами чисел.

При ***транспонировании*** матрицы A ее строки становятся столбцами и наоборот. Матрица, получаемая из A транспонированием, обозначается A^{T}, например для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

получаем

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Вектором называется одномерный массив чисел. Например,

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

является вектором из трех элементов. Стандартной формой вектора мы будем считать ***вектор-столбец***, т. е. $n \times 1$ матрицу; при его транспонировании получается ***вектор-строка***

$x^{\mathrm{T}} = (2\ 3\ 5)$.

Вектор, i-й элемент которого равен 1, а все остальные элементы равны 0, называют ***единичным вектором*** и обозначают e_i. Количество элементов единичного вектора обычно определяется из контекста.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны 0. Такая матрица обычно обозначается O. Ее размер также обычно определяется из контекста.

Часто встречаются ***квадратные матрицы*** — матрицы размера $n \times n$. Рассмотрим некоторые виды таких матриц:

1. У ***диагональной матрицы*** все внедиагональные элементы равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i <> j$), поэтому она может быть задана перечислением элементов, стоящих на диагонали.

$$diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. ***Единичной матрицей*** называется диагональная матрица, диагональ которой заполнена единицами. При этом столбцами такой матрицы служат векторы e_1, e_2, …, e_n.

$$I_n = diag(1, 1, \ldots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

3. У ***верхне-треугольной матрицы*** все элементы под главной диагональю равны нулю ($u_{ij} = 0$ при $i > j$):

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

4. А у ***нижне-треугольной матрицы*** все элементы над главной диагональю равны нулю ($l_{ij} = 0$ при $i < j$):

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

5. ***Матрица перестановки*** имеет в точности одну единицу в каждой строке и в каждом столбце; на всех прочих местах у нее стоят нули. Пример матрицы перестановки:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножение вектора x на матрицу перестановки приводит к перестановке его элементов.

6. ***Симметрическая матрица*** удовлетворяет условию $A = A^{\mathrm{T}}$. Такая матрица, например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Действия с матрицами

Элементами матрицы или вектора служат элементы некоторой числовой системы (действительные числа, комплексные числа, …). Операции сложения и умножения в этой числовой системе можно распространить на матрицы с элементами из нее.

Пусть даны $(m \times n)$-матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$. Назовем их ***суммой*** $(m \times n)$-матрицу $C = (c_{ij}) = A + B$ с элементами

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,

где $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. Другими словами, сложение матриц осуществляется покомпонентно. Нулевая матрица является нейтральной матрицей для операции сложения матриц:

$A + O = A = O + A$.

Пусть λ — число, а $A = (a_{ij})$ — матрица. Можно ***умножить матрицу A на число λ***, умножив каждый элемент матрицы A на число λ, в результате получится матрица $\lambda A = (\lambda a_{ij})$. Особо отметим матрицу $-A = (-1)A$, называемую ***противоположной к A*** матрицей. Элемент с индексами i, j в матрице $-A$ равен $-a_{ij}$, поэтому

$A + (-A) = O = (-A) + A$.

Вычитание матрицы мы теперь можем определить как прибавление противоположной матрицы: $A - B = A + (-B)$.

Умножение матрицы A на матрицу B осуществимо, лишь если они имеют согласованные размеры, то есть число столбцов A совпадет с числом строк B. Если $A = (a_{ij})$ является $(m\times n)$-матрицей, а $B = (b_{ij})$ является $(n\times p)$-матрицей, то их ***произведением*** $C = AB$ называется $(m\times p)$-матрица $C = (c_{ij})$, в которой

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

для $i = 1, 2, \ldots, m$ и $k = 1, 2, \ldots, p$. Матрицы обладают многими (хотя и не всеми) свойствами чисел. Единичная матрица является нейтральным элементом для умножения: для любой $(m\times n)$-матрицы A:

$I_m A = A I_n = A$.

Умножение на нулевую матрицу дает нулевую матрицу:

$AO = O$.

Умножение матриц ассоциативно:

$A(BC) = (AB)C$

для любых матриц A, B и C согласованных размеров. Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения:

$A(B + C) = AB + AC$,

$(B + C)D = BD + CD$.

При n <> 1 умножение $(n\times n)$-матриц, вообще говоря, не коммутативно, что легко проверяется непосредственно. Например, для

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ но } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителей разложением по какой-нибудь строке или столбцу

В общем виде определитель n-го порядка может быть представлен следующем виде:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

где a_{ij} – элемент определителя, i – номер строки, j – номер столбца.

Возьмем a_{ij} в определителе и вычеркнем i строку, j столбец. В результате останется определитель порядка на единицу ниже. Такой определитель называется минором элемента $\mathbf{a_{ij}}$. Обозначается минор – M_{ij}.

Пример: Найти минор элемента a_{12} определителя $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Для этого вычеркнем первую строку, второй столбец.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

В результате останется определитель порядка на единицу ниже и минор равен:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор взятый со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, в которой расположен элемент, четная и с обратным знаком, если нечетная.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad \text{- алгебраическое дополнение}$$

<u>ТЕОРЕМА:</u> Определитель n-го порядка равен сумме произведений какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

<u>Нахождение обратной матрицы методом элементарных преобразований</u>

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1}, называется *обратной* к квадратной матрице А, если для нее выполняется следующее условие $A^{-1} A = A A^{-1} = E$, где Е - единичная матрица того же порядка что и матрица А.

Свойства обратных матриц: $(A^{-1})^{-1} = A$; $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

2. Квадратная матрица А называется *невырожденной* или *неособенной*, если её определитель отличен от нуля, т. е. .

3. Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная

матрица А невырожденная, т. е. $|A| \neq 0$. В этом случае её можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$$

где $\tilde{A}$ - присоединённая матрица, элементы которой равны алгебраическим дополнениям элементов матрицы, транспонированной к матрице *A*.
Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции: а) перемена двух строк (столбцов) местами;
б) умножение стоки (столбца) на число, отличное от нуля.
в) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой стоки (столбца).

2. Пример выполнения

1. Найти матрицу, противоположную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Для нахождения противоположной матрицы умножаем матрицу А на к = -1: $-A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найти линейную комбинацию 3А - 2В, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала находим произведение А на $к_1 = 3$ *и В на* $к_2 = -2$:

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -3 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix}, \quad -2B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем сумму полученных матриц:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6-8 & -12+2 & 0+4 \\ -3+0 & 15+6 & 3-10 \\ 0-4 & 9+0 & -21+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -3 & 21 & -7 \\ -4 & 9 & -13 \end{pmatrix}.$$

3. Найти произведение АВ, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\textit{Решение. } AB = \begin{pmatrix} 0\cdot3+(-1)\cdot2+2\cdot1 & 0\cdot1+(-1)\cdot1+2\cdot0 \\ 2\cdot3+1\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+0\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+7\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+7\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример:</u> Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

По теореме определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки и разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$=(-1)^{1+1}1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}(-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+5}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 1\cdot(-2) - 1\cdot 0 - 2\cdot 2 = -2$$

<u>Пример:</u> Найти матрицу, обратную к матрице А, используя преобразования исходной матрицы к единичной Е:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:

Определитель матрицы $|A| = -20 \neq 0$, значит, матрица А имеет обратную, матрицу A можно привести к единичной E элементарными преобразованиями только строк или только столбцов, при этом единичная матрица, подвергаемая тем же преобразованиям, перейдёт в матрицу A^{-1}. Удобно совершать элементарные преобразования над матрицами A и E одновременно, записывая обе матрицы рядом, через черту в виде объединённой матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Поменяем местами 1-й и 2-й столбцы.

Затем к элементам 3-го столбца прибавим элементы 1-го, а к элементам 2-го – 1-го, умноженные на (-2). Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

К элементам 1-го столбца прибавим элементы 2-го, умноженные на (-2), а к элементам 3-го столбца – умноженные на (-6). Далее в полученной матрице к элементам 1-го и 2-го столбцов прибавляем элементы 3-го, умноженные на (-1).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -15 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Слева получили единичную матрицу. Найденная справа от черты квадратная матрица является обратной к исходной матрице А:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Варианты заданий.

Вари ант	Задание 1 Найдите определители матриц	Задание 2 Найти обратную матрицу А⁻ с помощью элементарных преобразований $A = \begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & m \end{pmatrix}$	Задание 3 Найти матрицу 3*A+4*B-5*E, если 3*A+4*B-5*E , B= $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & m & 3 \\ 4 & n & 2 \end{pmatrix}$,E – единичная матрица
1	а) D = $\begin{vmatrix} -7{,}2 & 3 \\ 8{,}1 & 4 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	n=3 m=1	
2	а) D = $\begin{vmatrix} -4 & 3.9 \\ 7 & 6.2 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	n=3 m=2	

3	а) $D = \begin{vmatrix} -7{,}8 & -4 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$	n=3 m=3
4	а) $D = \begin{vmatrix} 3{,}8 & -4{,}1 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	n=3 m=4
5	а) $D = \begin{vmatrix} 4{,}9 & -3 \\ 1{,}7 & -6 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	n=3 m=5
6	а) $D = \begin{vmatrix} 4{,}7 & -8 \\ 3{,}2 & -6 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	n=2 m=-1
7	а) $D = \begin{vmatrix} 7 & -3{,}4 \\ 6 & -4{,}2 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	n=2 m=-2
8	а) $D = \begin{vmatrix} 8{,}3 & -6 \\ 2{,}7 & -4 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$;	n=2 m=-3

	в) $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$	
9	а) $D = \begin{vmatrix} 4{,}8 & -7 \\ 2{,}4 & -3 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$	n=2 m=-4
10	а) $D = \begin{vmatrix} 8 & -4{,}6 \\ 9 & -2{,}9 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	n=2 m=-5

4.Дополнительное задание:
Найти обратную матрицу A^{-1} двумя способами – с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Тема 1.2 Системы линейных уравнений

Решение СЛУ по формулам Крамера
Цели:
- получить навыки решения систем m линейных уравнений с m переменными;
- получить навыки решения систем линейных уравнений матричным способом.
- закрепить теоретические знания и практические умения.

1. Краткие теоретические сведения
<u>Решение СЛУ по формулам Крамера.</u>
Пусть нам требуется решить систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные переменные, $a_{i\,j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ – числовые коэффициенты, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - свободные члены. Решением СЛАУ называется такой набор значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при которых все уравнения системы обращаются в тождества.

В матричном виде эта система может быть записана как $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - основная матрица системы, ее элементами являются коэффициенты при неизвестных переменных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матрица – столбец свободных членов, а $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица – столбец неизвестных переменных. После нахождения неизвестных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, матрица $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ становится решением системы уравнений и равенство $A \cdot X = B$ обращается в тождество $A \cdot X \equiv B$.

Будем считать, что матрица A – невырожденная, то есть, ее определитель отличен от нуля. В этом случае система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

1. Вычисляем определитель основной матрицы системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ и убеждаемся, что он отличен от нуля.

2. Находим определители

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

которые являются определителями матриц, полученных из матрицы A заменой *k-ого* столбца ($k = 1, 2, \dots, n$) на столбец свободных членов.

3. Вычисляем искомые неизвестные переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ по формулам $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \dfrac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.

4. Выполняем проверку результатов, подставляя $x_1, x_2, \dots, x_n$ в исходную СЛАУ. Все уравнения системы должны обратиться в тождества. Можно также вычислить произведение матриц $A \cdot X$, если в результате получилась матрица, равная B, то решение системы найдено верно. В противном случае в ходе решения была допущена ошибка.

2. Пример выполнения

Пример.

Найдите решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений методом

Крамера $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = \dfrac{5}{6} \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$.
Решение.

Основная матрица системы имеет вид $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислим ее определитель по формуле $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 9 + 4 = 13$$

Так как определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то СЛАУ имеет единственное решение, и оно может быть найдено методом Крамера. Запишем определители Δ_{x_1} и Δ_{x_2}. Заменяем первый столбец основной матрицы системы на столбец свободных членов, и получаем определитель $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} \frac{5}{6} & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. Аналогично заменяем второй столбец основной матрицы на столбец свободных членов, и получаем $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & \frac{5}{6} \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$.
Вычисляем эти определители:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} \frac{5}{6} & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{6} \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = \frac{5}{2} + 4 = \frac{13}{2}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & \frac{5}{6} \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - \frac{5}{6} \cdot 2 = 6 - \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$$

Находим неизвестные переменные x1 и x2 по формулам $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{\frac{13}{2}}{13} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{\frac{13}{3}}{13} = \frac{1}{3}$$

Выполним проверку. Подставим полученные значения x1 и x2 в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 3\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{6} \\ 2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{6}\equiv\frac{5}{6} \\ 2\equiv 2 \end{cases}$$

Оба уравнения системы обращаются в тождества, следовательно, решение найдено верно.
Ответ:

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{3}.$$

3. Варианты заданий.

Вариант №1

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x-2y-z=1 \\ x+2y+4z=2 \\ 3x-2y+z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4y+3z=18 \\ 2x+2y+3z=15 \\ 4x+4y+z=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+7x_2-x_3=8 \end{cases}$$

Вариант №2

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x-2y-z=2 \\ x+3y+2z=2 \\ 3x+y+2z=2 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{matrix} 3x+4y+2z=8 \\ x+5y+2z=5 \\ 2x+3y+4z=3 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{matrix}\right\}$$

Раздел 2 Математический анализ

Тема 2.1 Функция

Исследование свойств функций.
Цели:
- получить навыки исследования свойств функции элементарными методами;
- выработать навык строить и читать графики функций;
- закрепить теоретические знания и практические умения.

1.Краткие теоретические сведения

Функция - это одно из важнейших математических понятий. Функция - зависимость переменной **y** от переменной **x**, если каждому значению **x** соответствует единственное значение **y**. Переменную **x** называют независимой переменной или аргументом. Переменную **y** называют зависимой переменной. Все значения независимой переменной (переменной **x**) образуют область определения функции. Все значения, которые принимает зависимая переменная (переменная **y**), образуют область значений функции.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции, тоесть по оси абсцисс откладываются значения переменной **x**, а по оси ординат откладываются значения переменной **y**. Для построения графика функции необходимо знать свойства функции. Основные свойства функции будут рассмотрены далее!

Основные свойства функций.

1) Область определения функции и область значений функции.

Область определения функции - это множество всех допустимых действительных значений аргумента **x** (переменной **x**), при которых функция **y = f(x)** определена.

Область значений функции - это множество всех действительных значений **y**, которые принимает функция.

В элементарной математике изучаются функции только на множестве действительных чисел.

2) Нули функции.

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

3) Промежутки знакопостоянства функции.

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

4) Монотонность функции.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

5) Четность (нечетность) функции.

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **x** из области определения выполняется равенство **f(-x) = f(x)**. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **x** из области определения справедливо равенство **f(-x) = - f(x)**. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

6) Ограниченная и неограниченная функции.

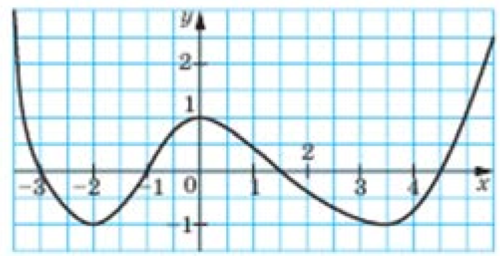
Функция называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \le M$ для всех значений x . Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

7) Периодическость функции.

Функция f(x) - периодическая, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции имеет место: f(x+T) = f(x). Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

2. Примеры выполнения

Для понимая данной темы, рассмотрим функцию , изображенную на графике // Покажем, как график функции позволяет определить ее свойства.



Областью определения функции явл. промежуток [3,5; 5,5].
Областью значений функции явл. промежуток [1; 3].
1. При x = -3, x =- 1, x = 1,5, x=4,5 значение функции равно нулю.
Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют нулем функции. //т.е. для данной функции числа -3;-1;1,5; 4,5 являются нулями.
2. На промежутках [4,5; 3) и (1; 1,5) и (4,5;5,5] график функции f расположен над осью абсцисс, а на промежутках (-3; -1) и (1,5; 4,5) под осью абсцисс, это объясняется так -на промежутках [4,5; 3) и (1; 1,5) и (4,5;5,5] функция принимает положительные значения, а на промежутках (-3; -1) и (1,5; 4,5) отрицательные.
Каждый из указанных промежутков (там где функция принимает значения одного и того же знака) называют промежутком знакопостоянства функции f.//т.е. например, если взять промежуток (0; 3), то он не является промежутком знакопостоянства данной функции.
В математике принято при поиске промежутков знакопостоянства функции указывать промежутки максимальной длины. //Т.е. промежуток (2; 3) является **промежутком знакопостоянства** функции f, но в ответ следует включить промежуток [4,5; 3), содержащий промежуток (2; 3).
3. Если перемещаться по оси абсцисс от 4,5 до 2, то можно заметить, что график функции идет вниз, то есть значения функции уменьшаются. //В математике принято говорить, что на промежутке [4,5; 2] функция убывает.
С увеличением x от 2 до 0 график функции идет вверх, т.е. значения функции увеличиваются. //В математике принято говорить, что на промежутке [2; 0] функция возрастает.
Функцию f называют **возрастающей на некотором промежутке**, если для любых двух значений аргумента x1 и x2 из этого промежутка таких, что x2 > x1, выполняется неравенство f (x2) > f (x1). // или Функцию называют **возрастающей на некотором промежутке**, если для любых значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции.//т.е. чем больше x, тем больше y.
Функцию f называют **убывающей на некотором промежутке**, если для любых двух значений аргумента x1 и x2 из этого промежутка таких, что x2 > x1, выполняется неравенство f(x2)убывающей на некотором промежутке, если для любых значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. //т.е. чем больше x, тем меньше y.
Если функция возрастает на всей области определения, то ее называют **возрастающей**.
Если функция убывает на всей области определения, то ее называют **убывающей**.

4. **Задания для самостоятельной работы**

Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{x^2-1}+\log_3(-x^2+x+12)$; б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{49-x^2}}{\log_{31}(x+4)}$.

Найдите $E(f)$ — область изменения функции

1. $f(x)=\sqrt{x^2-8x+25}$. **2.** $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{25-x^2}}$, $x\in[-2;\ \sqrt{21}]$.

Исследуем на четность функцию:

а) $f(x)=\dfrac{12}{(x-10)(x+10)}$;

б) $f(x)=\dfrac{5}{x-11}+\dfrac{7}{x+21}$.

Тема 2.2 Предел

Исследование способ вычисления предела функции.
Цели:
- получить навыки раскрытия неопределённостей с помощью правила Лопиталя;
- получить навыки вычисления приближенных значений функций с помощью дифференциала;
- выработать навык составления уравнений касательной и нормали;
- закрепить теоретические знания и практические умения.

1.Краткие теоретические сведения

Раскрытие неопределенностей при вычислении пределов функций.

Правило Лопиталя представляет собой метод вычисления пределов, имеющих неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пусть а является некоторым конечным действительным числом или равно бесконечности.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, то аналогично $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере наряду с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Неопределенности вида $0^0, 1^\infty, \infty^0$ можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$, f(x)>0 вблизи точки а при $x \to a$. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции $\ln y = g(x)\cdot \ln f(x)$.

2. Примеры выполнения

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение: Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1+\ln x\right)'}{\left(e^x-e\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e}$$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2Arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2Arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\pi-2Arctgx)'}{\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{e^{\frac{3}{x}}\cdot\frac{-3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right]=\frac{-2}{(0+1)\cdot1\cdot(3)}=\frac{2}{3}$$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(xe^{\frac{x}{2}}\right)'}{(x+e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{1+e^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x\right)\right)'}{(1+e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+x}{4e^{\frac{x}{2}}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4+x)'}{\left(4e^{\frac{x}{2}}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}=0$$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-Sinx}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-Sinx}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(x-Sinx)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-Cosx}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-Cosx)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{Sinx}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(Sinx)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{Cosx}=\frac{2}{1}=2$$

Пример: Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^x$.

Решение: Здесь $y=x^x,\ \ln y=x\cdot\ln x$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln y=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(x\ln x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x=0.$$

Следовательно

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \ln\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y\right) = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = 1$$

3. Задания для самостоятельной работы

3.1 Вычислите пределы функций, используя правило Лопиталя

а. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$

б. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{7+x} - 3}{x-2}$

в. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

г. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right)$

д. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{tgx}{tg3x}$

е. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\ln\left(x^2 - 3\right)}$

ж. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$

4.2 Найдите пределы функций, не используя правило Лопиталя

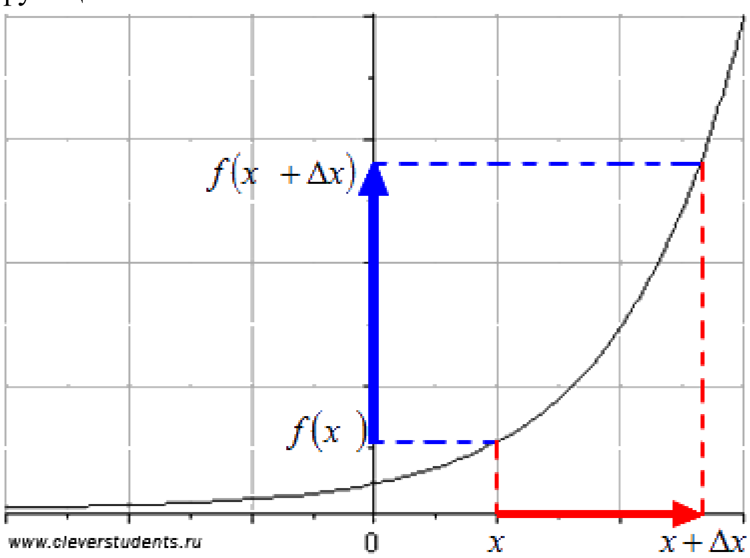
а. $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}} \frac{2x^2 + 3x - 5}{2x^2 + 9x + 10}$ б. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{1-x} - 2}$ в. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Cosx - Cos^3 x}{xtgx}$

Раздел 3 Дифференциальное и интегральное исчисление

Тема 3.1 Производная функции

Исследование способов дифференцирования функции
Цели:
- получить навыки применения производной;
- закрепить теоретические знания и практические умения

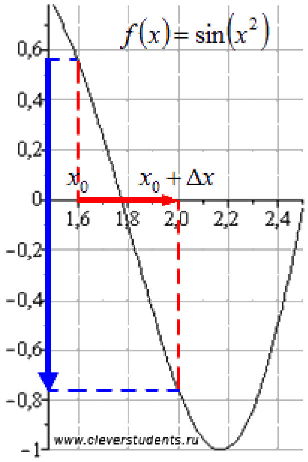
1.Краткие теоретические сведения
Путь *x* – аргумент функции *f(x)* и Δx - малое число, отличное от нуля.
Δx (читается «дельта икс») называют **приращением аргумента функции**. На рисунке красной линией показано изменение аргумента от значения *x* до значения $x+\Delta x$ (отсюда видна суть названия «приращение» аргумента).
При переходе от значения аргумента x_0 к $x_0+\Delta x$ значения функции изменяются соответственно от $f(x_0)$ до $f(x_0+\Delta x)$ при условии монотонности функции на отрезке $[x_0; x_0+\Delta x]$. Разность $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x)$ называют **приращением функции *f(x)***, соответствующем данному приращению аргумента. На рисунке приращение функции показано синей линией.



Рассмотрим эти понятия на конкретном примере.
Возьмем, к примеру, функцию $f(x)=\sin(x^2)$. Зафиксируем точку $x_0=1.6$ и приращение аргумента $\Delta x=0.4$. В этом случае приращение функции при переходе от $x_0=1.6$ к $x_0+\Delta x=1.6+0.4=2$ будет равно

$$\Delta f(x)=\Delta\sin(x^2)=\sin\left((x_0+\Delta x)^2\right)-\sin\left({x_0}^2\right)=$$
$$=\sin 2^2-\sin 1.6^2=\sin 4-\sin 2.56\approx -1.306$$

Отрицательное приращение $\Delta f(x)$ говорит об убывании функции на отрезке $[1.6; 2]$.
Графическая иллюстрация



Определение производной функции в точке.

Пусть функция *f(x)* определена на промежутке *(a; b)*, x_0 и $x_0+\Delta x$ - точки этого промежутка. **Производной функции *f(x)* в точке** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$.

Обозначается $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Когда последний предел принимает конкретное конечное значение, то говорят о существовании *конечной производной в точке*. Если предел бесконечен, то говорят, что *производная бесконечна в данной точке*. Если же предел не существует, то и *производная функции в этой точке не существует*.

Функцию *f(x)* называют **дифференцируемой в точке** x_0, когда она имеет в ней конечную производную.

Если функция *f(x)* дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка *(a; b)*, то функцию называют дифференцируемой на этом промежутке. Таким образом, любой точке *x* из промежутка *(a; b)* можно поставить в соответствие значение производной функции в этой точке $f'(x)$, то есть, мы имеем возможность определить новую функцию $f'(x)$, которую называют **производной функции *f(x)* на интервале *(a; b)***.

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**.

Таблица производных

Функция	Производная
$y = C, \quad C = Const$	0
$y = Cx$	$y' = C$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = e^{nx}$	$y' = ne^{nx}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

2. Примеры выполнения

Найти производную функции $\sin(2x)$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$, используя определение.

Решение.

Так как мы ищем производную функции в точке, то в ответе должно быть число. Запишем предел отношения приращения функции к приращению аргумента и воспользуемся формулами тригонометрии:

$$(\sin(2x_0))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \sin(2x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(2(x_0 + \Delta x)) - \sin(2x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{2(x_0 + \Delta x) - 2x_0}{2} \cdot \cos \frac{2(x_0 + \Delta x) + 2x_0}{2}}{\Delta x} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x) \cdot \cos(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

Осталось применить первый замечательный предел для получения конечного результата:

$$(\sin(2x_0))' = 2 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x) \cdot \cos(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos(2x_0 + \Delta x) =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \cos(2x_0 + 0) = 2\cos(2x_0) = 2\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ответ:

$$(\sin(2x_0))' = 1$$

3. Задания для самостоятельной работы

1.	Пользуясь определением, найдите производную функции		
	1.	$f(x)=4x-5$	
	2.	$f(x)=x^2+4x-6$	
2.	Найдите производные функций:		
	1.	$f(x)=x^3-3x^2+5x-3$, $f'(x)=$	
	2.	$f(x)=2x^3+x^2-3x+3$, $f'(x)=$	
	3.	$f(x)=e^x\cdot\cos x$, $f'(x)=$	
	4.	$f(x)=3^x\cdot\log_3 x$, $f'(x)=$	
	5.	$f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-3}$, $f'(x)=$	

Тема 3.2 Приложение производной

Исследование функций с помощью производной, решение прикладных задач с помощью производной.

Цели:

– получить навыки применения производной при исследовании функций;

– закрепить теоретические знания и практические умения

1.Краткие теоретические сведения

Общая схема исследования функций с помощью производной

1. Нахождение области определения функции.
2. Проверка того, является ли функция четной, нечетной, периодической или эта функция – функция общего вида.
3. Определение точек пересечения с осями координат.
4. Нахождение промежутков монотонности функции и точек экстремума.
5. Определение промежутков знакопостоянства функции.
6. Исследование функции на выпуклость, вогнутость, определение точек перегиба (исследование проводится по второй производной функции).
7. Нахождение асимптот функции.
8. Уточнение графика функции по точкам (произвести окончательное уточнение графика, в особенности на участках, где информация о нем недостаточна).

Данную схему можно варьировать в зависимости от конкретных особенностей функции, переставлять отдельные этапы, некоторые из них опускать, какие-то, наоборот, добавлять.

2. Примеры выполнения

Пример: Исследовать функцию $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение:

1.Область определения функции $x \in (-\infty;-1),(-1;1),(1+\infty)$.

2.Функция $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ является нечетной т.к. $y(-x) = \dfrac{-x}{1-(-x)^2} = -\dfrac{x}{1-x^2} = -y(x)$.

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x \geq 0$.

3.Точки пересечения с осями координат $x = 0, y(0) = 0$

Точка (0;0) - точка пересечения графика с осями OX и OY.

4.Найдем промежутки монотонности функции и точки экстремума.

$$y' = (\frac{x}{1-x^2})' = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$$

Так как y'>0 в области определения, то функции является возрастающей на каждом интервале области определения.

Т.к. $y' = \dfrac{x^2+1}{(1+x^2)^2}$, то критическими точками является точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

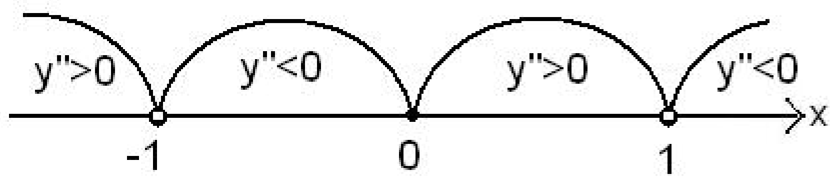
Данные точки не принадлежат области определения функции, значит, функция экстремумов не имеет.

5.Функция знакоположительна (y>0) в интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$, знакоотрицательна – в интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$.

6.Исследуем функцию на выпуклость и найдем точки перегиба:

Найдем y''

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$



Точка (0;0) – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$.

7.Найдем асимптоты функции:

Прямые x = 1 и x = -1 являются вертикальными асимптотами функции.

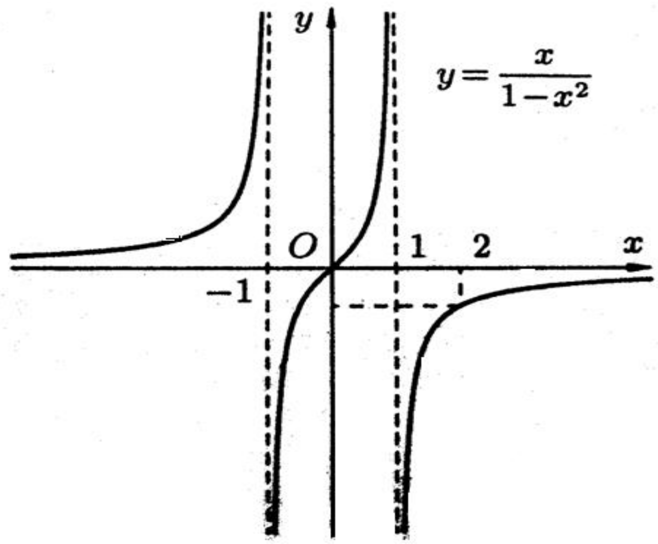
Выясним наличие наклонной асимптоты.

$$R = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота ее уравнение y=0. Наклонных асимптот нет.

Прямая y=0 является асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$.

8.Проведенного исследования достаточно для построения графика функции $y = \dfrac{x}{1-x^2}$.



3. Задания для самостоятельной работы

Исследовать функцию и построить ее график.

а) $y = x^3 - 3x$

в) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$

б) $y = \frac{x^3}{3} + x^2$

г) $y = 3x - x^2$

Тема 3.2 Приложение производной

Выполнение реферативной работы по теме «Производная»

Цели:

- изучить на более глубоком уровне отдельные вопросы изучаемой темы;
- закрепить теоретические знания и практические умения

Творческая работа (подготовка рефератов и докладов по темам):

- «Производные и дифференциалы высших порядков»
- «Приближенные вычисления с помощью дифференциала»

Раздел 4 Интегральное исчисление

Тема 4.1 Неопределенный интеграл

Исследование способов интегрирования функции
Цели:
- получить навыки вычисления неопределенного интеграла различными методами;
- закрепить теоретические знания и практические умения.

1.Краткие теоретические сведения
Функция называется первообразной функцией для данной функции на данном промежутке, если на этом промежутке $F'(x) = f(x)$.
Выражение *F(x)+C,* где *F(x)*-первообразная функции *f(x)* и *C* - произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции *f(x).*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Основные свойства неопределенного интеграла

$1^0\ (\int f(x)dx)' = f(x)$

$2^0\ d\int f(x)dx = f(x)dx$

$3^0\ \int dx(x) = F(x) + c$

$4^0\ \int kf(x)dx = k\int(x)dx$

$5^0\ \int[f(x) \pm g(x)] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблица основных интегралов

1. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, (\alpha \neq -1),$ в частности, $\int du = u + c;$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c;$

4. $\int e^u du = e^u + c;$

5. $\int \sin udu = -\cos u + c;$

6. $\int \cos udu = \sin u + c;$

7. $\int tgudu = -\ln|\cos u| + c;$

8. $\int ctgudu = \ln|\sin u| + c;$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c;$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c;$

11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + c;$

12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + c;$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c;$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c;$

15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + c;$

16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c;$

17 $\int \sqrt{a^2 - u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + c;$

18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c.$

Основные методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственном интегрированием.

Примеры:

1. $\int \frac{d(x)}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + c$

2. $\int \left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}\right) d(x) = 4\int x^3 dx - \frac{5}{2}\int \frac{d(2x)}{\cos^2 2x} - \int 3^{1-x} d(1-x) = x^4 - \frac{5}{2} tgx - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + c$

Метод интегрирования подстановкой

Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t)$ и получают

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt .$$

Примеры:

1. $\int \cos 3x dx = \begin{vmatrix} t = 3x \\ dt = (3x)' dx = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{vmatrix} = \int \cos t \cdot \frac{1}{3}dt = \sin t + c = \frac{1}{3}\sin 3x + c$

2. $\int \sin(7x+8)dx = \begin{vmatrix} t = 7x+8 \\ dt = 7dx \\ dx = \frac{1}{7}dt \end{vmatrix} = \int \sin t \cdot \frac{1}{7}dt = -\frac{1}{7}\cos t + c = -\frac{1}{7}\cos(7x+8) + c$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{vmatrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \\ dx = -\frac{dt}{2x} \end{vmatrix} = -\int \frac{dt}{2\cdot\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$

4. $\int (15-3x)^7 dx = \begin{vmatrix} t = 15-3x \\ dt = -3dx \\ dx = -\frac{1}{3}dt \end{vmatrix} = \int t^7 (-\frac{1}{3})dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8} + c = -\frac{(15-3x)^8}{24} + c$

Метод интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Вид интеграла *P(x)*- многочлен	Рекомендуемая подстановка

a, b, k –некоторые числа	*u*	*dv*
$\int P(x)arctgxdx$	$u = arctgx$	$d\upsilon = P(x)dx$ $\upsilon = [первообразная P(x)]$
$\int P(x)arcctgxdx$	$u = arcctgx$	
$\int P(x)\ln xdx$	$u = \ln x$	
$\int P(x)\arcsin xdx$	$u = \arccos x$	
$\int P(x)\arccos xdx$	$u = \arcsin x$	
$\int P(x)e^{kx}dx$	$u = P(x)$	$d\upsilon = e^{kx}dx \quad \upsilon = [первообразная \ \ e^{kx}]$
$\int P(x)\sin kxdx$		$d\upsilon = \sin kxdx \quad \upsilon = [первообразная \sin kx]$
$\int P(x)\cos kxdx$		$d\upsilon = \cos kxdx \quad \upsilon = [первообразная \cos kx]$
$\int e^{ax}\cos bxdx$ $\int e^{ax}\sin bxdx$	*При решении метод применяется дважды*	

<u>Примеры:</u>

$$1.\int \ln xdx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$$

$$2.\int (2x+1)e^{3x}dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+1 \ \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2xdx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + c$$

$$3.\int e^x \cos xdx = \left| \begin{matrix} u = e^x \quad \Rightarrow dx = \cos xdx \\ du = e^x dx \Rightarrow \upsilon = \sin x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin xdx = \left| \begin{matrix} u = e^x \quad \Rightarrow d\upsilon = \sin xdx \\ du = e^x dx \Rightarrow \upsilon = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos xdx\right) \Rightarrow \int e^x \cos xdx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

2. Задания для самостоятельной работы

2. 1 Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

$1.\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx$

$2.\int (x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x})dx$

$3.\int (\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx$

$4.\int (2^x + 3^x)dx$

$5.\int e^x(2 - \frac{e^{-x}}{x^3})dx$

$6.\int (\sin x + 5\cos x)dx$

$7.\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$

$8.\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

$9.\int (\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{x^2+3})dx$

2.2 Пользуясь методом подстановки вычислить интегралы:

$1.\int \cos 5xdx$

$2.\int \sin 7xdx$

$3.\int \sin(3x+5)dx$

$4.\int e^{2x}dx$

$5.\int tgxdx$

$6.\int e^{-x^2}xdx$

$7.\int \frac{e^{4x}}{e^x-1}dx$ $8.\int \frac{x^4}{x^5+7}dx$ $9.\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$

2.3 С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы:

$1.\int xarctgxdx$ $4.\int arctg\sqrt{7x-1}dx$ $8.\int \left(4x^3+6x-7\right)\ln xdx$

$2.\int \arcsin xdx$ $5.\int x\ln xdx$ $9.\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$

$3.\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$ $6.\int x\ln(3x+2)dx$

$7.\int \left(x^2+3x+2\right)\ln xdx$

Тема 4.2 Определенный интеграл

Построение плоской фигуры и вычисление ее площади

Цели:

- получить навыки вычисления определенного интеграла различными методами;
- получить навыки применения определенного интеграла к вычислению площадей, объемов тел и других величин;
- закрепить теоретические знания и практические умения.

1. Краткие теоретические сведения

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке [a;b], $a<b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками $a=x_0<x_1<x_2<x_3<...<x_{i-1}<...<x_n=b$. В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1},x_i]$ выберем произвольную точку Ci $(x_{i-1}\le Ci\le x_i)$ и составим сумму

$$S_n=f(C_1)\times\Delta x_1+f(C_2)\times\Delta x_2+f(C_3)\times\Delta x_3+.......+f(C_n)\times\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(Ci)\times\Delta x_i \quad (*)$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Сумма вида (*) называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на отрезке [a;b].

Обозначим через α длину наибольшего частичного отрезка разбиения: $\alpha=\max\{\Delta x_i\}\quad 1\le i\le n$. Если существует конечный предел интегральной суммы S_n, когда $n\to\infty$ так, что $\alpha\to 0$, то этот предел называют определенным интегралом от функции $y=f(x)$ на отрезке [a;b] и обозначают следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)dx=\lim_{\alpha\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x)\Delta x_i .$$

В этом случае функция $y=f(x)$ называется интегрируемой на отрезке [a;b] . Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости.

Основные свойства определенного интеграла

$1^0\int_a^b f(x)dx=0$; $2^0\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$;

$3^0 \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

где a, b, c любые числа.

$4^0 \int_a^u kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

$5^0 \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b] и функция y = *F(x)* является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

<u>Вычисление определенных интегралов</u>

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Интегрирование подстановкой

Теорема. Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi$(t). Если:

1) функция $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [d;\beta]$;

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha;\beta]$ является отрезок [a;b];

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

<u>Вычисление площади плоской фигуры</u>

Найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью O_x и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a \le x \le b$, $f(x) \ge 0$ (см. рис. 6)

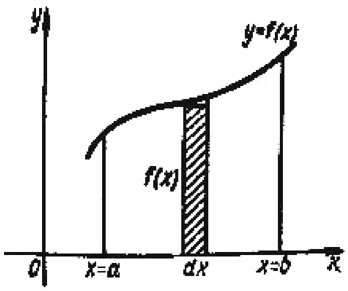


Рисунок 6

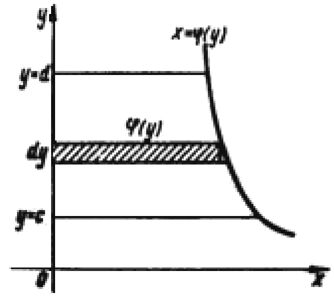


Рисунок 7

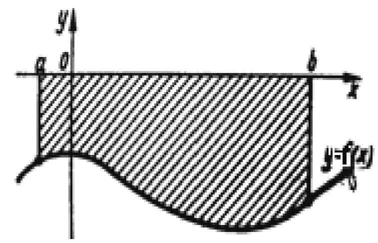


Рисунок 8

Так дифференциал переменной площади S есть площадь прямоугольника с основанием dx и высотой $f(x)$, т. е. $dS = f(x)dx$, то, интегрируя это равенство в пределах от a до b, получим

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Если криволинейная трапеция прилегает к оси O_y так, что $c \le y \le d$, $x = \varphi(y) \ge 0$ (см.рис. 7), то дифференциал переменной площади S равен $dS = f(y)dy,$ откуда

$$S = \int_c^d \varphi(x)dx$$

В том случае, когда криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью O_x и прямыми x=a и x=b, лежит под осью O_x (см.рис. 8), площадь находится по формуле

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

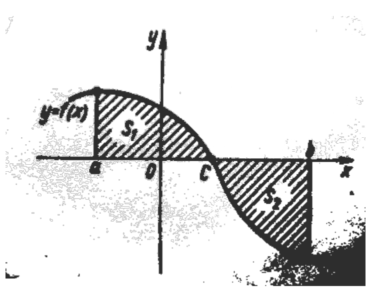


Рисунок 9

Если фигура, ограниченная кривой $f(y)$, осью O_x и прямыми x=a и x=b, расположена по обе стороны от оси O_x (см.рис.9), то

$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b |f(x)|dx$$

Пусть, наконец, фигура S ограничена двумя пересекающимися кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и прямыми x=a и x=b, где $a \le x \le b$ и $f_1(x) \le f_2(x)$ (см.рис.10). Тогда ее площадь находится по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

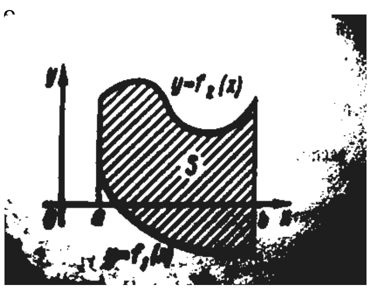


Рисунок 10

2. Пример выполнения

Пример: Вычислить $\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2} dx$.

Решение:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = \left| \begin{matrix} u = e^x & dx = \sin\frac{x}{2}dx \\ du = e^x dx & x = -2\cos\frac{x}{2} \end{matrix} \right| = -2\cos\frac{x}{2}e^x \ \Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} e^x \cos\frac{x}{2}dx =$$

$$\left| \begin{matrix} u = e^x & dx = \cos\frac{x}{2}dx \\ du = e^x dx & x = 2\sin\frac{x}{2} \end{matrix} \right| = -2\cos\frac{\pi}{2}e^{\pi} + 2\cos\frac{0}{2}e^0 + 2\left(2e^x \sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx\right) =$$

$$= 2 + 4e^{\pi}\sin\frac{\pi}{2} - 4e^0\sin\frac{0}{2} - \int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 2 + 4e^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx$$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 1 + 2e^{\pi}$$

Ответ: $\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 1 + 2e^{\pi}$

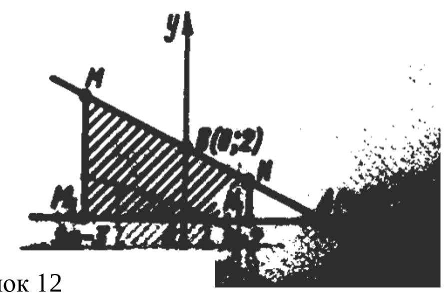


Рисунок 12

Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $x + 2y - 4 = 0$, $y = 0$, $x = -3$ и $x = 2$.

Решение: Выполним построение фигуры. Строим прямую $x + 2y - 4 = 0$ по двум точкам A(4;0) и B(0;2) (см.рис.12). Выразив y через x, получим $y = -0{,}5x + 2$. По формуле $S = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x) = -0{,}5x + 2$, $a = -3$ и $b = 2$, находим

$$S = \int_{-3}^{2} (-0{,}5x + 2)dx = \left[-0{,}25x^2 + 2x\right]_{-3}^{2} = 11{,}25 \text{ (кв. ед.)}$$

В качестве проверки вычислим площадь трапеции M_1MNN_1 обычным путем. Находим: $M_1M = f(-3) = -0{,}5(-3) + 2 = 3{,}5$, $N_1N = f(2) = -0{,}5 \cdot 2 + 2 = 1$, $M_1N_1 = 5$. Следовательно, $S = 0{,}5(3{,}5 + 1) \cdot 5 = 11{,}25$ (кв. ед.).

3. Варианты заданий

3.1 Вычислить определенный интегралы:

1. $\int_a^b x^n dx (n \neq 1)$
2. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$
3. $\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx$
4. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$
5. $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$
6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1 + x^2}dx$
7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

8. $\int_{0}^{\pi} \sin 2x dx$

9. $\int_{1}^{e} \ln x dx$

10. $\int_{1}^{e} \ln^2 x dx$

11. $\int_{-1}^{1} x e^{-x^2} dx$

12. $\int_{0}^{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$

13. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

3.2 Задачи на приложение определенного интеграла

1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями $x-2y+4=0$, $x+y-5=0$, $y=0$.
2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функцией $x^2+y^2=r^2$.
3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями $7x^2-9y+9=0$, $5x^2-9y+27=0$.
4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями $x-y+2=0$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$.
5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями $2x-3y+6=0$, $y=0$, $x=3$.
6. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: $y=2x^2+1$, $y=x^2+10$.
7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями $y=-1.5x^2+9x-7.5$, $y=-x^2+6x-5$.

Тема 4.2 Определенный интеграл

Выполнение реферативной работы по теме «Интеграл»

Цели:

- изучить на более глубоком уровне отдельные вопросы изучаемой темы;
- закрепить теоретические знания и практические умения

Творческая работа (подготовка рефератов и докладов по темам):

- «Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и объемов тел»
- «Приложения определенного интеграла к решению задач специальности»
- «Интегрирование функции, содержащих квадратный трехчлен»
- «Поверхность тела вращения»

Раздел 5 Комплексные числа

Тема 5.1 Комплексных чисел
Выполнение арифметических операций с комплексными числами по алгоритму
Цели:
- получить навыки выполнения операций над комплексными числами в алгебраической и геометрической формах;
- закрепить теоретические знания и практические умения.

1.Краткие теоретические сведения.

Квадратное уравнение с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом не имеет действительных корней. Поэтому приходится расширять множество действительных чисел, добавляя к нему новые числа. Эти новые числа вместе с действительными числами образуют множество, которое называют множеством ***комплексных чисел.***

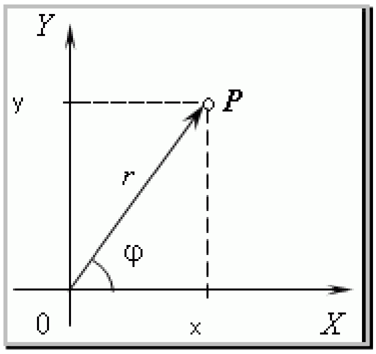
Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y - действительные числа, i – мнимая единица. $i^2=-1$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ *равны*, если $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$. Комплексное число $z = x + iy$ равно нулю если x = 0, y = 0. Понятия «больше», «меньше» для комплексных чисел не вводится.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются сопряженными.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой P(x;y) плоскости Oxy, такой, что x =Rez , y =Imz (см. рис.1)

Плоскость на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Ось абсцисс называется действительной осью, а ось ординат – мнимой.



Рисунок

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OP} = (x, y)$.

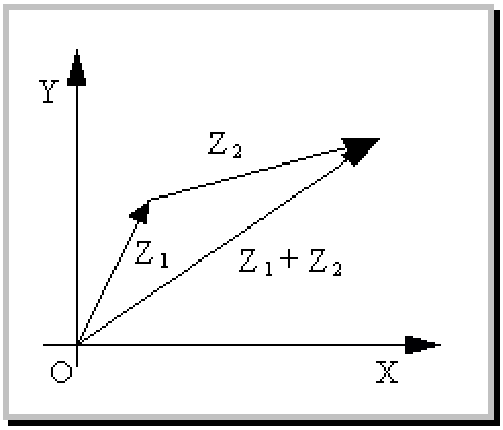
Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z называется модулем этого числа и обозначается $|z|$ или r . Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент комплексного числа - это угол φ между осью OX и вектором OP, изображающим это комплексное число. Обозначается . Argz

Сложение комплексных чисел.

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Правило нахождения суммы комплексных чисел в геометрической форме (см. рис.2).



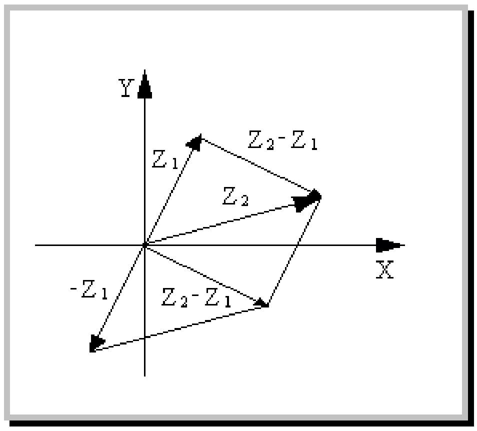


Рисунок 2 Рисунок 3

Вычитание комплексных чисел.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Правило нахождения разности комплексных чисел в геометрической форме (см. рис.3).

Умножение комплексных чисел.

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Деление комплексных чисел.

Деление комплексных чисел определяется как действие обратное умножению. Частным двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ (z_2□□□□называется комплексное число z , которое, будучи умноженным на z_2, дает число z_1.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Все арифметические операции над комплексными числами в алгебраической форме проводятся по правилам действий над многочленами.

2. Пример выполнения

Пример: Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = 2 - 3\cdot\boldsymbol{i}$ и $z_2 = -7 + 8\cdot\boldsymbol{i}$.

Решение: $z_1 + z_2 = 2 - 7 + (-3 + 8)\cdot\boldsymbol{i} = -5 + 5\cdot\boldsymbol{i}$

$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3\cdot\boldsymbol{i})\cdot(-7 + 8\cdot\boldsymbol{i}) = -14 + 16\cdot\boldsymbol{i} + 21\cdot\boldsymbol{i} + 24 = 10 + 37\cdot\boldsymbol{i}$ (см.рис.4).

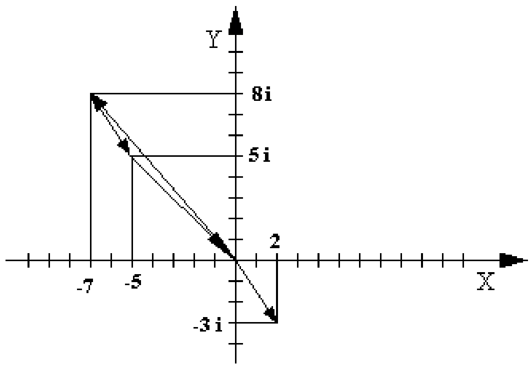


Рисунок 4

Пример: Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = 1 + 2\cdot\boldsymbol{i}$ и $z_2 = 2 - \boldsymbol{i}$.

Решение:

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = (1 + 2) + i(2 + (-1)) = 3 + i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i)\cdot(2 - i) = 1\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot i^2 + i(2\cdot 2 + 1\cdot(-1)) = 2 + 2 + i(4 - 1) = 4 + 3i$$

Пример: Даны комплексные числа $z_1 = 4 + 5\cdot\boldsymbol{i}$ и $z_2 = 3 + 4\cdot\boldsymbol{i}$. Найти разность $z_2 - z_1$ и частное $\frac{z_2}{z_1}$

Решение: $z_2 - z_1 = (3 + 4\cdot i) - (4 + 5\cdot i) = -1 - i$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{4\cdot 3+5\cdot 4}{16+25}+i\frac{4\cdot 4-3\cdot 5}{16+25}=\frac{32}{41}+\frac{1}{41}i$$

3.Варианты заданий

Вариант № 1

1. Дано комплексное число z=21 – 4i. Записать число равное, противоположное, сопряженное исходному.
2. Выполнить действие z =(3 - 2i + (-6 - 2i)
3. Выполнить умножение z = (3 + 4i) (1 + 3i)
4. Выполнить деление z = (-6 + 2i):(3 - 4i)
5. Выполнить действия z = (5 + 2i):(2 - 5i) + (7 + 3i):(1 - 2i)

Вариант № 2

1. Дано комплексное число z = 3 + 9i. Записать число равное, противоположное, сопряженное исходному.
2. Выполнить действие z =(5 + 3i) + (-2 - 5i).
3. Выполнить умножение z = (-2 + 3i) (-1 - 6i)
4. Выполнить деление z = (4 +-3i):(-2 - 5i)
5. Выполнить действия z = (-1 + 3i):(5 + i) - (3 - 4i):(4 + 3i).

Раздел 6. Теория вероятностей и математическая статистика

Тема 6.1 Теория вероятностей и математическая статистика

Решение простых вероятностных задач
Цели:
- изучить материалы по видам распределений и составить опорный конспект;
- получить навыки вычисления вероятности события, составления закона распределения случайной величины;
- закрепить теоретические знания и практические умения.

1. Краткие теоретические сведения:
Теория вероятностей –это раздел математики изучающий закономерности массовых случайных событий.
Испытанием (опытом) называется совокупность условий, при которых может произойти данное случайное событие.
Событие –это факт, который при осуществлении определенных условий может произойти или нет. События обозначают большими буквами латинского алфавита: A, B, C, D и т.д.
Событие бывают:
- достоверным –это событие, которое в результате испытания непременно должно произойти;
- невозможное –это событие, которое в результате испытания не может произойти;
- случайное –это событие, которое при испытании может произойти или не произойти.

События называются несовместными, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого.
События называются совместными, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого.
События называются равновозможными, если нет оснований считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.
События образуют полную группу событий, если в результате испытания обязательно произойдет хотя бы одно из них и любые два из них несовместны.
События, входящие в полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, называются исходами, или элементарными событиями.
Два несовместных события A и $\overline{A}$ называются противоположными, если в результате испытания одно из них должно обязательно произойти.
Событие *A* называется независимым от события *B*, если вероятность осуществления события *A* не зависит от того, произошло событие *B* или нет.
Событие *A* называется благоприятствующим событию *B*, если появление события *A* влечет за собой появление события *B*.
Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.
Произведением нескольких событий называется событие, которое состоит в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.
Вероятность события –это число, характеризующее степень возможности появления события при многократном повторении испытаний.
Вероятностью *P(A)* события *A* называется отношение числа благоприятствующих исходов *m* к общему числу равновозможных несовместных исходов *n*:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Основные свойства:
1. Вероятность случайного события *A* заключена между нулем и единицей:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Вероятность достоверного события *U* равна 1:

$$P(U) = \frac{n}{n} = 1$$

3. Вероятность невозможного события *V* равна нулю:

$$P(V) = \frac{0}{n} = 0$$

<u>Теорема сложения вероятностей</u>

Вероятность суммы двух несовместных событий *A* и *B* равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

Вероятность события *A,* вычисленная в предположении, что произошло событие *B,* называется условной вероятностью события *A* при условии *B* (обозначается *P(A/B)*).

<u>Теорема умножения вероятностей</u>

Вероятность произведения двух независимых событий *A* и *B* равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

<u>Формула полной вероятности. Формула Байеса</u>

Вероятность события *B*, которое может наступить только при условии появления одного из событий (гипотезы) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на соответствующую условную вероятность события *B*.

После проведения опыта, в результате которого осуществилось событие *B,* вероятности гипотез A_i можно переоценить по *формуле Байеса:*

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B / A_i)}$$

<u>Схема повторных испытаний. Формула Бернулли</u>

Если при одних и тех же условиях определенный опыт повторяется *n* раз и если вероятность появления некоторого события *A* в каждом опыте равна *p,* то вероятность того, что событие *A* в серии из *n* опытов произойдет ровно *k* раз, находится по ***формуле Бернулли:***

$$P_n(k) = C \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p$$

<u>Случайные величины</u>

Часто в результате испытания происходят события, заключающиеся в том, что некоторая величина принимает одно из своих возможных значений.

В таких случаях удобно вместо множества событий рассматривать одну переменную величину (называемую случайной величиной). Случайная величина обозначается через X, Y, Z, … и т.д.

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, меняющееся от испытания к испытанию и зависящее от случайных обстоятельств.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Если множество возможных значений случайной величины конечно или образуют бесконечную числовую последовательность, то такая случайная величина называется дискретной.

Случайная величина, множество значений которой заполняет сплошь некоторый числовой промежуток, называется непрерывной.
Если случайная величина не относится ни к дискретным, ни к непрерывным случайным величинам, то ее называют смешанной.
Очевидно, что для полной характеристики дискретной случайной величины мало знать ее значения. Необходимо им поставить в соответствие вероятности.
Соответствие между всеми возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называется законом распределения данной случайной величины.
Простейшая формой задания закона распределения дискретной случайной величины является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины (обычно в порядке возрастания) и соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Такая таблица называется рядом распределения. Допустим, что число возможных значений случайной величины конечно: x_1, x_2, …, x_n. При одном испытании случайная величина принимает одно и только одно постоянное значение. Поэтому события $X=x_i$ ($i=1,2,\ldots,n$) образуют полную группу попарно независимых событий. Следовательно, $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$.
Можно закон распределения изобразить и графически, откладывая на оси абсцисс возможные значения случайной величины, а на оси ординат – соответствующие вероятности. Для большей выразительности полученные точки соединяются прямолинейными отрезками. Получающая при этом фигура называется многоугольником (полигоном) распределения.

Функция распределения вероятностей

Непрерывную случайную величину нельзя охарактеризовать перечнем всех возможных ее значений и их вероятностей. Естественно, встает вопрос о том, нельзя ли охарактеризовать случайную величину иным способом, одинаково годным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.
Функцией распределения случайной величины X называют функцию F(x), определяющую для каждого значения x, вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше x, т.е. $F(x) = P(X<x)$.
Иногда функцию F(x) называют интегральной функцией распределения.
Функция распределения обладает следующими свойствами:
1^0 Значение функции распределения принадлежит отрезку $[0;1]$: $0 \le F(x) \le 1$.
2^0 Функции распределения есть неубывающая функция.
3^0 Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a < X <) = F(b) - F(a).$$

4^0 Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(x)=0$ при $x \le a$; $F(x)=1$ при $x \ge b$.
5^0 Справедливы следующие предельные отношения:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

Числовые характеристики случайной величины

Функция распределения содержит полную информацию о случайной величине. На практике функцию распределения не всегда можно установить; иногда такого исчерпывающего знания и не требуется. Частичную информацию о случайной величине дают числовые характеристики, которые в зависимости от рода информации делятся на следующие группы.
1. Характеристики положения случайной величины на числовой оси (мода Mo, медиана Me, математическое ожидание M(X)).
2. Характеристики разброса случайной величины около среднего значения (дисперсия D(X),

среднее квадратическое отклонение σ(x)).
3. Характеристики формы кривой y = φ(x) (асимметрия As, эксцесс Ex).
Рассмотрим подробнее каждую из указанных характеристик.
Математическое ожидание случайной величины X указывает некоторое среднее значение, около которого группируются все возможные значения X. Для дискретной случайной величины, которая может принимать лишь конечное число возможных значений, математическим ожиданием называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины на вероятность этих значений:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n .$$

Модой дискретной случайной величины Mo, называется ее наиболее вероятное значение, а модой непрерывной случайной величины - значение, при котором плотность вероятности максимальна.
Медианой (срединная точка) непрерывной случайной величины X называется такое ее значение Me, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше Me, т.е.P(X < Me) = P(X > Me)
Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания D(X) = M[X –M(X)]^2.Дисперсию дискретной случайной величины X удобно вычислять по формуле:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2=\sum_i x_i^2 p_i-\left[M(X)\right]^2 ;$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется арифметический корень из дисперсии, т.е. $\sigma=\sqrt{D(X)}$. Заметим, что размерность σ совпадает с размерностью самой случайной величины X, поэтому среднее квадратическое отклонение более удобно для характеристики рассеяния.

Теоретические распределения.
Биномиальное распределение. Пусть в каждом из *n* независимых испытаний событие *A* может произойти с одной и той же вероятностью *p* (следовательно, вероятность непоявления *q*=1–*p*). Дискретная случайная величина *X* – число наступлений события *A* – имеет распределение, которое называется биномиальным.
Ряд распределения случайной величины *X*, подчиненной биномиальному закону, можно представить в виде следующей таблицы

0	1	…	k	n
$C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^n$	$C_n^1 \cdot p^1 \cdot q^{n-1}$	…	$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	$C_n^n \cdot p^n \cdot q^0$

Название закона связано с тем, что вероятности $P_n(k)$ при k = 0, 1, 2, …, n являются членами разложения бинома Ньютона

$$\left(p+q\right)^n = q^n + C_n^1 \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \ldots + C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} + \ldots + p^n .$$

Распределение Пуассона
Это распределение представляет собой предельный случай биномиального, когда вероятность *p* очень мала, а число испытаний *n* велико.
Таким образом, им можно пользоваться при описании частот распределения редких событий, таких, например, как случай обширных наводнений на протяжении долгого периода времени наблюдений.
Дискретная случайная величина X, которая может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностями $P_n(k)\approx\dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где k – число появления событий в *n* независимых испытаниях, $\lambda = n \cdot p$ (среднее число появлений события в n испытаниях),

называется распределенной по закону Пуассона с параметром λ.
В отличие от биномиального распределения здесь случайная величина может принимать бесконечное множество значений, представляющее собой бесконечную последовательность целых чисел 0, 1, 2, 3, … .
Закон Пуассона описывает число событий k, происходящих за одинаковые промежутки времени. При этом полагается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, которая характеризуется параметром $\lambda = n \cdot p$. Так как для распределения Пуассона вероятность *p* появления события в каждом испытании мала, то это распределение называют законом распределения редких явлений.
Для теоретического распределения Пуассона имеет место: M(X) = D(X) = λ.

Равномерное распределение
Равномерным называется распределение непрерывных случайных величин, все значения которых лежат на отрезке [*a*, *b*] и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке.
Закон равномерного распределения случайной величины может быть задан следующими образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} \ \text{при} \ a \le x \le b, \\ 0 \ \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Показательное (экспоненциальное) распределение
Случайная величина называется распределенной по экспоненциальному закону, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \ \text{при} \ x \ge 0. \end{cases}$$

Для данного вида распределения характерно, что:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Экспоненциальным законом описываются случайные величины, выражающие время безотказной работы устройств или их отдельных элементов.

Нормальное распределение (закон Гаусса)
Непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение вероятностей с параметрами a и σ, если ее плотность распределения задается формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

где a – математическое ожидание случайной величины, σ^2 –дисперсия случайной величины, σ –среднее квадратическое отклонение.

2. Примеры выполнения
Пример: Из урны, в которой находится 4 белых, 9 черных, 7 красных шаров. Наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?
Решение: Элементарным исходом является извлечение любого шара. Число таких исходов равно числу шаров: 4+9+7=20, т.е. *n*=20. Событие *A* – извлечение белого шара, ему благоприятствуют 4 исхода, т.к. белых шаров 4, значит *m*=4, поэтому:

$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}=20\%$.

Пример (Задача о выборке): В партии из S деталей имеются T нестандартных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу p деталей нестандартными окажутся ровно t деталей.

Решение: Элементарным исходом является выборка любых p изделий из общего числа S. Число таких исходом равно числу сочетаний из S по p, т.е. $n=C_S^p$

Интересующее нас событие A – это извлечение p деталей, из которых t нестандартные. Следовательно, благоприятными для A являются такие группы по p изделий, в которых p-t изделий – качественные, а t – нестандартные.

Число таких групп $m=C_T^t\cdot C_{S-T}^{p-t}$, где C_T^t -группа стандартных изделий, C_{S-T}^{p-t} -группа нестандартных изделий, причем события из группы стандартных комбинируются из группы нестандартных, тогда

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_T^t\cdot C_{S-T}^{p-t}}{C_S^p}$$

Пример: В партии из 50 изделий содержится пять бракованных. Какова вероятность того, что из выбранных наудачу 30 изделий не более одного бракованного?

Решение: Пусть A — событие, состоящее в том, что 30 изделий выборки — качественные, B — в рассматриваемой выборке из 30 изделий только одно бракованное, C— не более одного бракованного. Тогда, очевидно, $C=A+B$. Так как события A и B несовместны, то $P(C)=P(A)+P(B)$.

Найдем вероятности событий A и B:

$$P(A)\approx 0{,}007,\quad P(B)\approx 0{,}065$$

Отсюда $P(C)\approx 0{,}072$.

Пример: Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы первого станка в течение некоторого времени t равна p_1= 0,9, второго — p_2= 0,8. Какова вероятность бесперебойной работы обоих станков в течение указанного промежутка времени?

Решение: Рассмотрим следующие события: A_1 и A_2— бесперебойная работа соответственно первого и второго станков в течение времени t; A — бесперебойная работа обоих станков в течение указанного времени. Тогда событие A есть совмещение событий A_1 и A_2, т. е. $A=A_1\cdot A_2$. Так как события A_1 и A_2 независимы (станки работают независимо друг от друга), то по получим

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}9\cdot 0{,}8=0{,}72\,.$$

Пример: Имеется три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 5 черных, во второй — 5 белых и 4 черных, в третьей — 6 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что: а) этот шар окажется белым; б) белый шар вынут из второй урны.

Решение:

а) Пусть A — событие, означающее, что извлечен белый шар. Рассмотрим три гипотезы: H_1— выбрана первая урна; H_2— выбрана вторая урна; H_3— третья.Так как урна, из которой извлекают шар, выбирается наугад, то $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$.

Условные вероятности события A соответственно равны:

$P(A/H_1)=\frac{4}{9}$ (вероятность извлечения белого шара из первой урны),

$P(A/H_2)=\frac{5}{9}$ (вероятность извлечения белого шара из второй урны),

$P(A/H_3)=1$ (вероятность извлечения белого шара из третьей урны).

Отсюда по формуле полной вероятности получим

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

б) Для определения вероятности того, что белый шар извлечен из второй урны, воспользуемся формулой Байеса:

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{18}$$

3. Задания для выполнения

Вариант 1

1. В группе 20 студентов, среди них 14 юношей. Найти вероятность того, что среди наудачу выбранных 6-ти студентов будут 3 девушки и 3 юноши.
2. Имеются 4 коробки с шарами.

1-я: 4 синих и 5 красных;
2-я: 5 синих и 4 красных;
3-я: 7 красных;
4-я: 12 синих.

Наудачу берут шар. Он красный. Найти вероятность того, что он из 2-й коробки.

3. Двум студентам предложена задача. Вероятность того, что её решит 1-й студент равна 0,72, что решит 2-й – 0,65. Найти вероятность того, что задачу решат оба студента; что решит только один?

Вариант 2

1. Имеются 23 детали и среди них 19 стандартные. Случайным образом выбирают сразу 6. Какова вероятность, что среди выбранных ровно 5 стандартных?
2. В цехе продукция производится на 3-х станках:

1-й станок 45% всей продукции, из них брак 5%;
2-й станок 35% всей продукции, из них брак 10%;
3-й станок 20% всей продукции, из них брак 2%.

Найти вероятность, что наудачу взятая деталь из всех произведенных стандартная. Какова вероятность, что она была произведена на 1-м станке?

3. Два стрелка независимо друг от друга производят выстрел по мишени. Вероятность попадания первым - 0,8, вторым – 0,9. Какова вероятность, что после одного выстрела в мишени будет только одна пробоина?

Вариант 3

1. В урне лежат шары: 7 белых, 4 черных и 9 красных. Наудачу вынимают сразу два шара. Какова вероятность, что они окажутся одного цвета?
2. В автоколонне 12 машин. Вероятность выхода на линию каждой машины – 0,8. Найти вероятность, что работа автоколонны будет осуществляться без сбоев, если для этого требуется, чтоб не менее 10 машин вышли на линию?
3. Цех производит продукцию на 2-х станках:70% изготавливается на 1-м станке, среди них 12% составляют бракованные детали, остальные детали производятся на втором станке, среди них 15% бракованные. Какова вероятность, что наудачу взятая деталь окажется бракованной? Какая вероятность, что бракованная деталь произведена на 2-м станке?

Вариант 4

1. Три стрелка стреляют независимо друг от друга по цели. Вероятность попадания первым -0,8; вторым – 0,75; третьим – 0,7. Найти вероятность того, что будет:
1) хотя бы одно попадание;
2) ровно одно попадание;
если произведен один выстрел каждым.
2. В магазин поступают часы, выпускаемые на 3-х заводах. Первый завод поставляет 40%, второй – 45%, третий – 15%. В продукции первого завод 20% часов спешат, второго завода – 30% часов спешат, третьего – 10% спешат. Найти вероятность того, что купленные часы спешат?
3. Какова вероятность, что при десяти бросках игральной кости пять очков выпадут ровно 3 раза?

Вариант 5
1. В мастерской работают 6 моторов. Для каждого мотора вероятность перегрева к обеденному перерыву равна 0,8. Найти вероятность того, что к обеденному перерыву перегреются:
1) ровно 4 мотора;
2) перегреются все моторы?
2. Детали на сборку попадают из трёх автоматов. Известно, что первый автомат дает 3% брака, второй – 2% брака, третий – 4% брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если 1-й автомат произвел 1000 деталей, 2-й – 2000 деталей и 3-й – 2500 деталей. Какова вероятность, что бракованная деталь произведена на 2-м автомате?
3. Из 3000 лотерейных билетов выигрышными являются 12. Какова вероятность, что из наудачу взятых 15 билетов хоть один будет с выигрышем?

Вариант 6
1. В белом ящике 12 красных и 6 синих шаров, в желтом ящике 15 красных и 10 синих шаров. Наудачу из некоторого ящика выбирают шар. Какая вероятность, что он красный? Какова вероятность, что красный шар вынут из белого ящика?
2. По самолету противника производят три выстрела. Вероятность попадания при 1-м выстреле-0,5, при 2-м – 0,6, при 3-м – 0.8. Вероятность сбить самолет при условии попадания при 1-м выстреле – 0,3, при 2-м – 0,6 и при 3-м – 0,9. Найти вероятность того, что самолет будет сбит. Какова вероятность, что он будет сбит при 1-м выстреле?
3. 3. Два студента решают задачу независимо друг от друга. Вероятность того, что решит 1-й – 0,7, что решит 2-й – 0,8. Найти вероятность того, что:
а) решат оба;
б) решит только один?

4.2. ПОДГОТОВКА ПРЕЗЕНТАЦИИ

Создание материалов-презентаций - это вид самостоятельной работы студентов по созданию наглядных информационных пособий. Этот вид работы требует координации навыков студента по сбору, систематизации, переработке информации, оформления её в виде подборки материалов, кратко отражающих основные вопросы изучаемой темы, в электронном виде. То есть создание материалов-презентаций расширяет методы и средства обработки и представления учебной информации, формирует у студентов навыки работы на компьютере.
Материалы-презентации готовятся студентом в виде слайдов. В качестве материалов-презентаций могут быть представлены результаты любого вида внеаудиторной самостоятельной работы, по формату соответствующие режиму презентаций.

Затраты времени на создание презентаций зависят от степени трудности материала по теме, его объёма, уровня сложности создания презентации, индивидуальных особенностей студента и определяются преподавателем.
Ориентировочное время на подготовку - 1,5 ч.
Роль преподавателя:
- помочь в выборе главных и дополнительных элементов темы;
- консультировать при затруднениях.

Роль студента:
- изучить материалы темы, выделяя главное и второстепенное;
- установить логическую связь между элементами темы;
- представить характеристику элементов в краткой форме;
- выбрать опорные сигналы для акцентирования главной информации и отобразить в структуре работы;
- оформить работу и предоставить к установленному сроку.

Критерии оценки:
- соответствие содержания теме;
- правильная структурированность информации; наличие логической связи изложенной информации; эстетичность оформления, его соответствие требованиям;
- работа представлена в срок.

ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ

- Непрерывные дроби
- Применение сложных процентов в экономических расчетах
- Параллельное проектирование
- Средние значения и их применение в статистике
- Векторное задание прямых и плоскостей в пространстве
- Сложение гармонических колебаний
- Графическое решение уравнений и неравенств
- Правильные и полуправильные многогранники
- Конические сечения и их применение в технике
- Понятие дифференциала и его приложения
- Схемы Бернулли повторных испытаний
- Исследование уравнений и неравенств с параметром
- История формирования понятия АЛГОРИТМ. Известнейшие алгоритмы в истории математики
- «Золотое сечение – гармоническая пропорция
- Эвклидова геометрия
- История развития действительных чисел
- История появления алгебры как науки
- Связь математики с другими науками
- Способы вычисления интегралов
- Определение элементарных функций
- Двойные интегралы и полярные координаты
- История появления комплексных чисел
- Математические головоломки и игры: сущность, значение и виды
- Математик Эйлер и его научные труды
- Декарт и его математические труды
- Развитие логики и мышления на уроках математики
- Современные открытия в области математики
- Производные: сущность, значение, вычисление

4.3. ПОДГОТОВКА К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Практическое занятие - самая активная и наиболее действенная форма самостоятельной работы студента. Здесь происходит живое общение студентов между собой и с преподавателями. В итоге студенты, конечно, приобретают определенные знания. Но более важно, с какими знаниями, с какой подготовкой они приходят на практику. Форма проведения практики, прежде всего, зависит от уровня знаний студентов, от степени их подготовленности к нему. Никакие дискуссии, споры, деловые игры, никакие формы состязательности невозможны, если студенты не готовы к семинару. С неподготовленными студентами, перебирающими на самой практике страницы учебника, записи лекций, ничего нельзя сделать, кроме «школярства» с пресловутым вопросно-ответным методом при пассивности основной части группы, когда каждый с тревогой ждет момента вызова его преподавателем, к сдаче «урока», как в школе. Однако практика – это не школьный урок, а дискуссия, обмен мнениями, поиск объективной истины с участием в среднем более подготовленных и более зрелых в житейском и интеллектуальном плане людей – преподавателя и студентов. Именно поэтому основное внимание преподавателя и студентов должно быть сосредоточено на подготовке к семинару. Это - главное, определяющее условие его успешного проведения.

Чтобы хорошо подготовиться к практике, студент заранее должен знать не только то, что надо к нему изучить, но и в какой форме он будет проводиться. Психологический фактор - не менее важное условие подготовки к семинару, чем приобретение знаний. Форму проведения практики избирает преподаватель. В необходимых случаях разрабатывается его сценарий. Подготовку практики определенного типа преподаватель может поручить инициативной группе из числа наиболее способных и знающих студентов. При любой форме проведения практики необходимо соблюдать одно методическое требование: студенты приходят на практику не для ответа на вопросы заданного «урока», а для творческого спора, дискуссии, сопоставления своего мнения и своей точки зрения с позицией других, для обмена аргументами, доказательствами. Главное в практике - приобретение через знания навыков свободной устной речи, полемики, самостоятельных суждений. Преподаватель, подводя итоги проведенного семинара, должен дать краткие указания и советы по подготовке к следующему-занятию.

Кроме тематики лекций студенты заранее должны знать и темы практических занятий. Это позволит им своевременно начать подготовку к ним.

4.4. КОНСУЛЬТАЦИИ

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки. Преподавателя проводят консультации в соответствии с графиком консультаций.

4.5. ПРОВЕДЕНИЕ ЗАЧЁТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «Математика»

В ходе зачёта и оценивается:

- *знание теоретического содержания* учебного материала и умение работать с ним (объяснение понятий и теоретических выводов; объяснение причинно-следственных связей (взаимообусловленности) между фактами и процессами);
- *хронологические знания и умения* (определение хронологических периодов);
- *умение проводить анализ содержания* теста; характеризовать позицию автора по проблемному вопросу;
- *знание различных точек зрения* на одни и те же вопросы и умение соотносить оценки (сравнение их аргументации, выявление в них общего и различного; определение и обоснование собственного мнения).

- *знание фактологического содержания биографии видных представителей дисциплины.*

Вопросы к зачёту по дисциплине утверждаются в начале учебного года и выдаются студентам в начале соответствующего семестра.